5. Linéarisation des problèmes non linéaires :

La formulation du filtre présentée plus tôt est basée sur un modèle linéaire des systèmes et elle n'est donc pas applicable dans les situations où le modèle du système ou le modèle de la mesure ou bien les deux sont non-linéaires. Ainsi, le problème principal dans ces cas est de linéariser d'abord le modèle, et puis d'appliquer le filtre standard de Kalman pour obtenir l'état du système. Un certain nombre de méthodes ont été développées dans cette direction; ici nous discuterons deux de telles approches.

Quand la linéarisation se fait autour d'une certaine trajectoire nominale dans l'espace d'état qui ne dépend pas des données de mesure, le filtre résultant s'appelle le *Filtre Linéarisé de Kalman* [4]. La linéarisation autour d'une trajectoire (estimée) qui est continuellement mise à jour avec les estimations d'état résultant des mesures s'appelle le *Filtre de Kalman Etendu* [5]. Dans les deux cas, la linéarisation est faite en utilisant la série de Taylor.
Nous examinerons maintenant ces approches en détail.

5.1 Le Filtre de Kalman Linéarisé : [4]

Dans le filtre linéarisé de Kalman, la linéarisation est faite autour d'une certaine trajectoire nominale, qui ne dépend pas des données de mesure, c.-à-d. que l'expansion en série de Taylor utilisée pour la linéarisation est évaluée à un certain point nominal connu

Considérez un modèle non-linéaire d'un système défini comme suit :

Modèle du processus: $$\mathrm{x_k} = \mathrm{f}(\mathrm{x_{k-1}}, \mathrm{u_{k-1}}) + \mathrm{w_{k-1}} \quad \text{……} (1.56)$$

Modèle de mesure: $$\mathrm{z_k} = \mathrm{h}(\mathrm{x_k}) + \mathrm{v_k} \quad \text{……} (1.57)$$

Là où, *f* et *h* sont des fonctions non-linéaires connues, $\mathrm{u_k}$ est la fonction (le vecteur) de commande et $\mathrm{w_k}$ et $\mathrm{v_k}$ sont des processus de type bruit blanc non corrélés. La non-linéarité peut résider soit dans le modèle du processus soit dans le modèle de mesure soit dans les deux fonctions.
Supposez qu'une trajectoire approximative x_k^{nom} (figure. 1.3) puisse être déterminée par un quelconque moyen; celle-ci est référée en tant que trajectoire nominale (la trajectoire de référence). La trajectoire réelle (actuelle) $\mathrm{x_k}$ peut être écrite en termes de x_k^{nom} et d'erreur δx_k comme suit:

$$\mathrm{x_k} = x_\mathrm{k}^{nom} + \delta x_k \quad \text{……} (1.58)$$

Les équations, (1.56) et (1.57) deviennent alors :

$$x_k^{nom} + \delta x_k = \mathrm{f}(x_{k-1}^{nom} + \delta x_{k-1}, \mathrm{u_{k-1}}) + \mathrm{w_{k-1}} \quad \text{……} (1.59)$$

$$\mathrm{z_k} = \mathrm{h}(\mathrm{x_k}^{\mathrm{nom}} + \delta x_k) + \mathrm{v_k} \quad \text{……} (1.60)$$

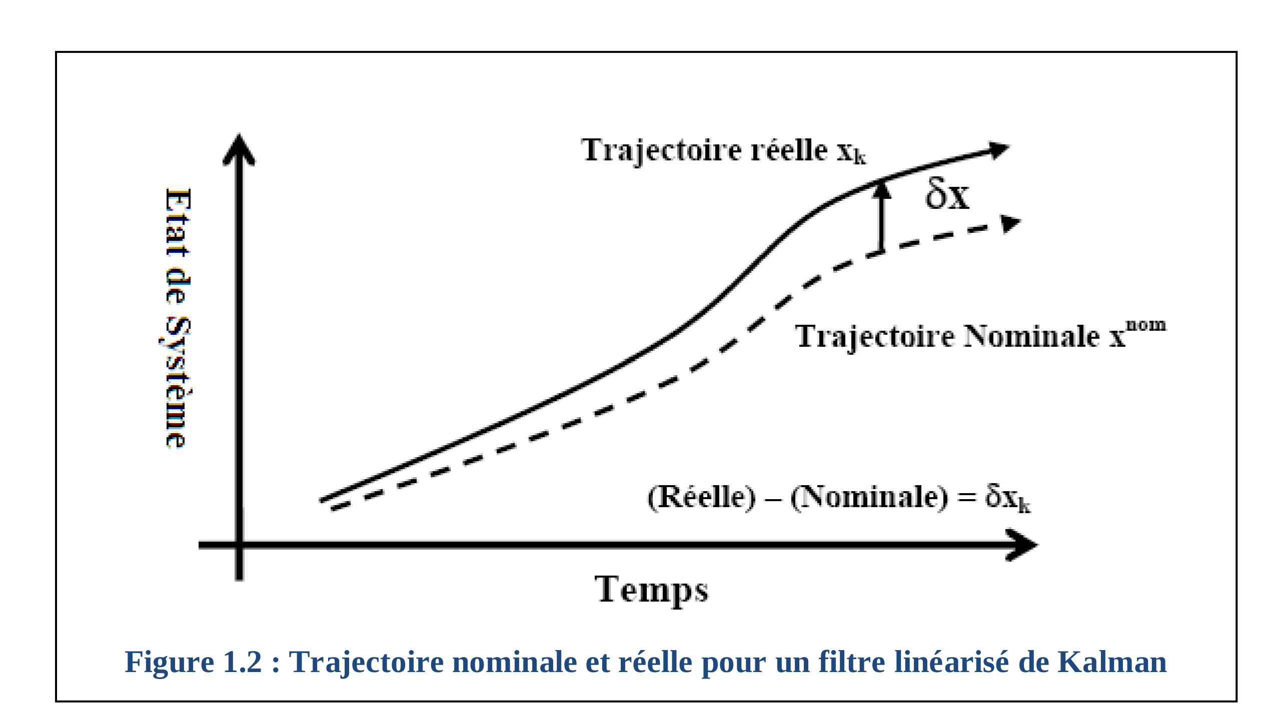


Figure 1.2 : Trajectoire nominale et réelle pour un filtre linéarisé de Kalman

Par l'application de l'expansion de série de Taylor dans l'équation (1.59) et en supposant que δx_k est petit, nous allons réaliser une expansion de f autour de ${x_k}^{nom}$ en ne gardant que le terme de premier ordre :

$$\mathrm{x_k} = {x_k}^{nom} + \delta x_k = \left(f\,({x_{k-1}}^{nom}, \mathrm{u_{k-1}}) + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}\Big|_{\mathrm{x}={x_{k-1}}^{nom}} .\ \delta\, x_{k-1} + \text{terme d'ordres élevés} \right) + \mathrm{w_{k-1}} \ldots\ldots\ldots.. (1.61)$$

$$\mathrm{f}({x_{k-1}}^{nom}, \mathrm{u_{k-1}}) = {x_k}^{nom}$$

$$=> \ \delta\, x_k \approx \mathrm{F_{k-1}}\ \ \delta\, x_{k-1} + \mathrm{w_{k-1}} \ \text{(La dynamique linéarisée)} \ldots\ldots\ldots..\ldots\ldots\ldots.. (1.62)$$

Où

$$\mathrm{F_{k-1}} = \left[\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}\right]_{\mathrm{x}={x_{k-1}}^{nom}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathrm{f_1}}{\partial \mathrm{x_1}} & \frac{\partial \mathrm{f_1}}{\partial \mathrm{x_2}} & \frac{\partial \mathrm{f_1}}{\partial \mathrm{x_3}} & \cdots \\ \frac{\partial \mathrm{f_2}}{\partial \mathrm{x_1}} & \frac{\partial \mathrm{f_2}}{\partial \mathrm{x_2}} & \frac{\partial \mathrm{f_2}}{\partial \mathrm{x_3}} & \cdots \\ \cdots & & & \\ \cdots & & & \end{bmatrix}_{\mathrm{x}=x^{nom}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (1.63)$$

et

$\mathrm{w_k} \sim \mathrm{N}(0, \mathrm{Q_k})$

En négligeant le second terme et les termes d'ordres supérieurs, la prédiction de l'état est propagée par les équations non-linéaires tandis que les erreurs d'état le sont par un système linéaire séparé.

Maintenant, la mesure peut être également linéarisé en utilisant l'expansion de la série de Taylor, en linéarisant h à ${x_k}^{nom}$ et négligeant les termes d'ordres supérieurs.

$$z_k = \left(h(x_k{}^{nom}) + \frac{\partial h}{\partial x}\Big|_{x=x_{k-1}{}^{nom}} . \delta x_k + \text{terme d'ordres élevés}\right) + v_k \ldots\ldots\ldots (1.64)$$

$$\delta\, z_k \approx z_k - h(x_k{}^{nom})$$

$$=> \ \delta\, z_k \approx H_k\, \delta x_k + v_k (\text{Équation de mesure linéarisée}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.65)$$

Où

$$H_k = \left[\frac{\partial h}{\partial x}\right]_{x=x_k{}^{nom}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \frac{\partial h_1}{\partial x_3} & \ldots \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \frac{\partial h_2}{\partial x_3} & \ldots \\ \ldots & & & \\ \ldots & & & \end{bmatrix}_{x=x_k{}^{nom}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.66)$$

$$v_k \sim N(0, R_k)$$

Les équations (1.62) et (1.65) constituent un modèle linéarisé pour le cas discret. Il est clair que ce modèle de système linéarisé peut être utilisé pour mettre en application un filtre linéarisé de Kalman parce que la relation de la dynamique d'erreur et la relation associée de mesure des erreurs sont devenues linéaires. Ici, nous estimons seulement la valeur d'incrément « l'erreur », ainsi les valeurs réelles de l'état seront l'incrément estimé plus la valeur nominale à l'instant même. Aussi F et H sont obtenus en évaluant les matrices de dérivées partielles (les Jacobiennes de *f* et *h*) le long de la trajectoire nominale. La position nominale (ou le vecteur d'état) peut changer avec chaque étape du processus récursif, ainsi les termes de H et de F peuvent être variables avec le temps et doivent être recalculés avec chaque étape récursive. Le problème dans la linéarisation autour de la trajectoire nominale est que la déviation de la trajectoire réelle de la trajectoire nominale tend à augmenter avec le temps. À mesure que la déviation augmente, les poids des termes d'ordres supérieurs dans l'expansion de la série de Taylor de la trajectoire augmentent.

La déviation de la trajectoire de référence est le vecteur d'état et les mesures dans le modèle linéaire sont les vraies mesures moins celles qui ont été prédites par la trajectoire nominale en l'absence du bruit.

Ce type de filtre est difficile d'utilisation pour des missions prolongées parce qu'après une certaine durée, la trajectoire de référence peut diverger en un point où l'hypothèse linéaire n'est plus valide à travers la variation du vecteur d'état.

Enfin, le filtrage linéarisé a l'avantage de permettre généralement une exécution en temps réel, cependant, il est moins robuste vis-à-vis des approximations non-linéaires des erreurs que le filtrage étendu. Un remède simple et efficace pour le problème de la déviation réside dans le remplacement de la trajectoire nominale par la trajectoire estimée, ce qui ramène au filtre de Kalman étendu.

5.2 Le Filtre de Kalman Etendu : [5]

Le filtre de Kalman étendu « EKF » a été développé par Stanley F. Schmidt. Il représente probablement l'approche la plus commune et la plus populaire pour traiter un système non linéaire. Son fonctionnement consiste simplement à linéarisé tous les modèles non-linéaires de sorte que le filtre linéaire traditionnel de Kalman puisse être appliqué. L'EKF est devenu une approche standard pour un certain nombre d'applications d'estimation non linéaire.

EKF est similaire à un filtre linéarisé de Kalman sauf que la linéarisation a lieu autour de la trajectoire estimée du filtre plutôt que de la trajectoire nominale pré-calculée (figure. 1.4). Ceci signifie que les dérivés partielles sont évaluées le long de la trajectoire qui a été mise à jour avec les estimations du filtre; ce qui dépend des mesures. Ainsi, le gain du filtre dépendra de la séquence d'échantillons de mesure et ne sera pas prédéterminé par les prévisions du modèle du processus:

Modèle non linéaire du processus : $x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}) + w_{k-1}$ ……………………… (1.67)

Modèle de mesure: $z_k = h(x_k) + v_k$ ……………………………… (1.68)

L'approximation de Taylor de *f* est faite autour de l'estimation de l'instant précédent $\hat{x}_{k-1}$:

$$F(\hat{x}, k) \approx \frac{\partial f(x,k)}{\partial x}\Big|_{x=\hat{x}_{k-1}} \quad (1.69)$$

L'approximation de Taylor de *h* est faite à la position (ou à l'état) prédite correspondante

$$H(\hat{x}, k) \approx \frac{\partial h(x,k)}{\partial x}\Big|_{x=\hat{x}_k^-} \quad (1.70)$$

Comme dans le cas du filtre linéarisé de Kalman, le développement limité donne cette fois-ci :

$$x_k \approx x_k^- + F_{k-1}(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + w_{k-1} \quad (1.71)$$
$$z_k \approx \hat{z}_k + H(x_k - x_k^-) + v_k \quad (1.72)$$

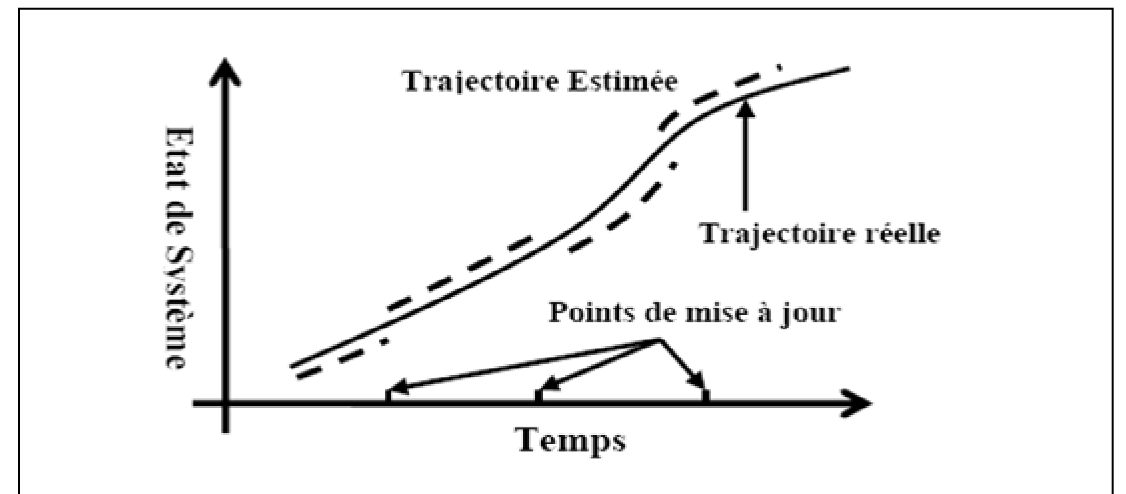


Figure 1.3: Trajectoire estimée (nominale) et réelle pour un filtre de Kalman étendu

Les équations (1.71) et (1.72) constituent un modèle linéarisé pour le cas discret. En général, l'EKF est difficile en raison du bouclage (le feedback) de la mesure au modèle du processus, mais il arrive à mettre à jour la trajectoire utilisée pour la linéarisation pendant que le temps évolue.

L'avantage du EKF est qu'il est plus exploitable pour les missions prolongées. Mais il peut encore parfois aboutir à une trajectoire pire que la trajectoire nominale particulièrement dans les cas où l'incertitude initiale et les erreurs de mesure sont grandes.
Néanmoins, le filtre linéarisé et le filtre étendu de Kalman sont utilisés dans des applications différentes, chacun ayant ses propres avantages et inconvénients.

La distinction précise entre les deux filtres (linéarisé et étendu) est basée sur la fonction de mesure $h(x^-)$, et plus précisément sur la façon dont elle est mise à jour : à partir de *la trajectoire corrigée* (filtre étendu) ou de *la trajectoire nominale* (filtre linéarisé). Lorsque $h(x^-)$ est calculée avant que les corrections ne soient faites aux sorties inertielles, le filtre est alors un filtre de Kalman linéarisé ordinaire. Si $h(x^-)$ est calculée après que les corrections aient été faites, le filtre est un filtre de Kalman étendu. En général, l'EKF est préféré particulièrement quand la durée de la mission est longue, parce que dans ce cas la trajectoire de référence peut diverger de la vraie trajectoire au-delà des limites acceptables.
Figure (1.5) montre les différentes étapes de l'algorithme d'estimation des paramètres du système non linéaire.

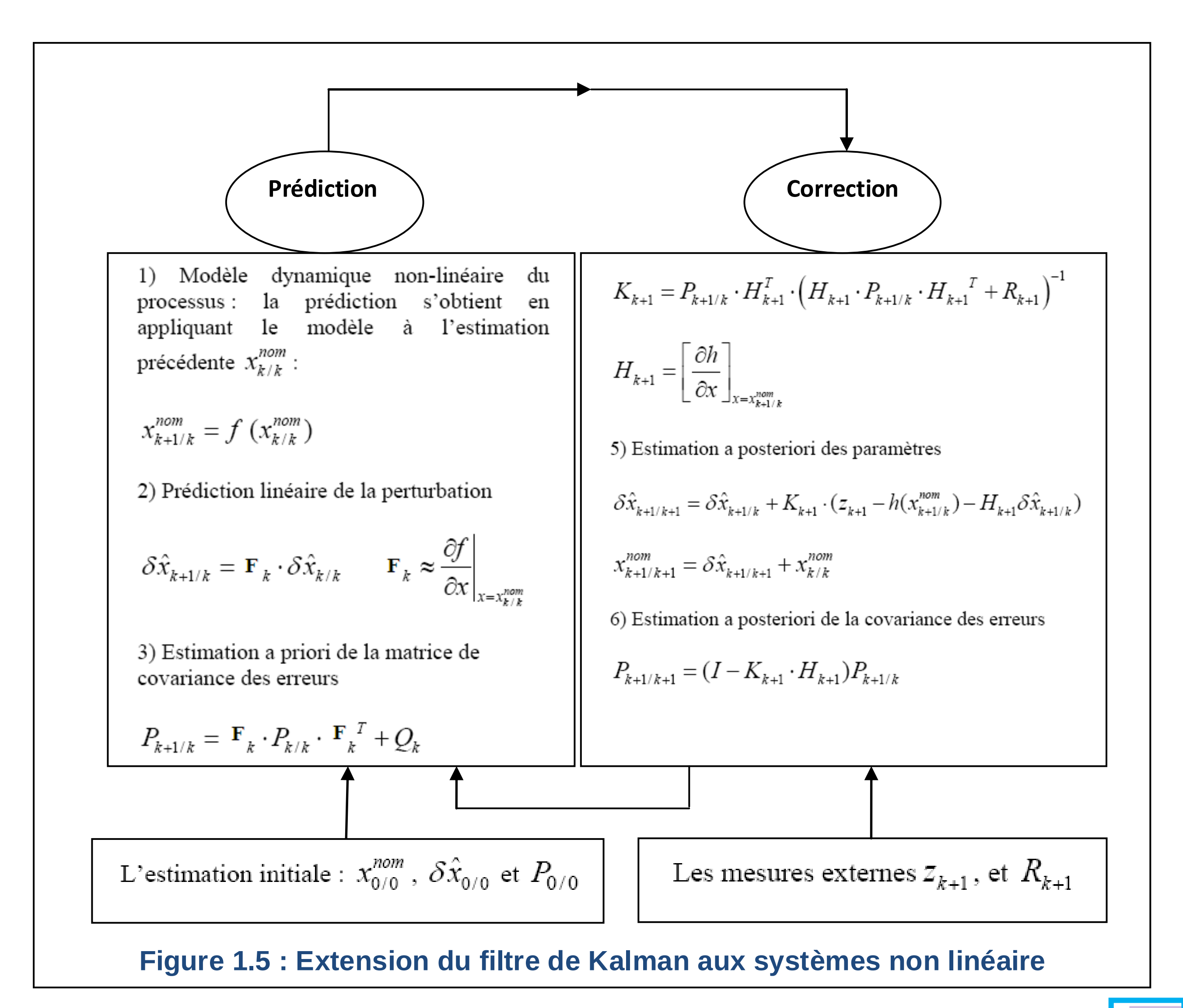


Figure 1.5 : Extension du filtre de Kalman aux systèmes non linéaire

5.2.1 Quelques aspects du filtre de Kalman étendu :

Le filtre de Kalman étendu est probablement le filtre le plus largement répandu pour un système non linéaire. Cependant, il présente certains inconvénients et défauts :

1. Une opération centrale et essentielle effectuée dans l'EKF est la propagation d'une variable gaussienne (GRV) par la dynamique du système. Dans l'EKF, la distribution d'état est approximée par un GRV, qui est alors propagé analytiquement par une linéarisation du premier ordre du système non linéaire. Les termes négligés dans la linéarisation peuvent être relativement grands ce qui peut présenter de grandes erreurs

2. dans l'estimation de la moyenne et de la covariance a posteriori du GRV transformé. Ceci peut mener à une performance sub-optimale et parfois à la divergence du filtre.

3. Le coût calculatoire de l'EKF est intensif par rapport au filtrage linéarisé de Kalman. Puisque la linéarisation est faite autour des estimations obtenues à partir du filtre, nous ne pouvons pas calculer le paramètre de filtre à l'avance, ce qui augmente la charge de calcul en temps réel.

4. La dérivation des matrices Jacobiennes n'est pas triviale dans la plupart des applications et introduisent souvent ensuite des difficultés d'implémentation significatives.

6. Conclusion :

Ce chapitre a été consacré à la présentation du filtre de Kalman qui consiste le noyau de plusieurs algorithmes de pistage. Au début on a présenté le filtre de Kalman dans le cadre linéaire, et après on a expliqué deux méthodes utilisé pour la linéarisation des problèmes non linéaire.

Il faut noter que L'estimateur le plus largement répandu pour les systèmes non linéaires est probablement le filtre de Kalman étendu (EKF).

1. Introduction :

Le filtrage est la mise en forme d'un signal à des fins très diversifiées. Pendant longtemps son rôle a consisté surtout dans l'élimination des bruits superposés aux signaux utiles et sa mise en œuvre a été du ressort des électroniciens.

Après l'avènement de l'automatique et des calculateurs numérique, le filtrage est devenu un outil fondamental. Il garantit l'équivalence analogique-numérique. Une fois la conversion numérique obtenue, le filtrage permet l'extraction d'informations utiles pour la reconnaissance des formes dans l'élaboration de la loi de commande des systèmes industriels.

Il existe deux espèces de filtrage appelées le filtrage fréquentiel et le filtrage optimal. Le filtrage fréquentiel comporte lui-même deux fonctions : le filtrage analogique et le filtrage numérique. Le filtrage analogique demeure un élément indispensable dans la synthèse des filtres numériques et un moyen de réduction de la bande passante pour le codage des signaux continus. De même, le filtrage numérique résoudre le problème de la mise en forme d'un signal et permet de réaliser l'interpolation et l'extrapolation, et peut être un filtre passe bande.

Le filtrage optimal admet deux théories importantes appelées théorie de Wiener et théorie de Kalman.

En 1950, Wiener a développé sa théorie en traitant seulement les signaux stationnaires sous leur forme fréquentielle. Il résoudre le problème de l'élimination du bruit parasite inhérent à la transmission et fait de l'estimation. Son inconvénient réside dans le non récursivité, ce qui rend un peu difficile la rapidité du système.

En 1960, une théorie s'est développée, dite théorie de Kalman, qui est une extension de la théorie de Wiener et représente plusieurs avantages.

Filtre de Kalman : Le filtre de Kalman représente une extension de la théorie de Wiener applicable aux signaux non stationnaires sous leur forme temporelle en présence des conditions initiales et d'entrées déterministes. Il résout le problème de filtrage linéaire et se présente sous la forme d'un ensemble d'équations récurrentes plus faciles à résoudre sur calculateur numérique, ce qui explique le succès remarquable de l'approche proposée par Kalman. Sa réalisation fournit non seulement l'estimée optimale, mais aussi la variance de l'erreur de l'estimation. C'est un observateur donnant la prédiction ou l'estimation du vecteur d'état. Lorsque les variances des bruits sont connues, c'est le meilleur observateur linéaire, de plus, si les bruits sont blancs gaussiens, linéaires ou non, c'est lui dont la variance de l'erreur d'estimation est la plus faible.

Le filtre de Kalman s'applique au système dynamiques linéaires, connus ou discrets, ont le bruit de mesure est blanc.

L'estimation de Kalman et ses nombreuses dérivées ont été développée avec succès dans le monde de l'aérospatial à de nombreux problèmes, comme la poursuite radar, l'estimation de trajectoires d'orbites… [1]

Après la parution des publications fondamentales de Kalman et Bucy pour la théorie de filtrage linéaire, un nombre très important de travaux fut consacré à ce problème, chaque auteur décrivant son algorithme en exploitant des méthodes comme les moindres carrées, le maximum de vraisemblance et d'autres méthodes statistiques classiques. Cependant, ces méthodes statistiques

laissent dans l'ombre la structure probabiliste du problème de filtrage, structure qui est fondamentale. [2]

2. Dérivation du filtre de Kalman :

2.1 Formulation du problème :

Le filtre de Kalman est caractérisé par les mesures qui sont générés par un système dynamique qui est présenté par un certain modèle [7]. Mathématiquement le filtre de Kalman peut être formulé par deux équations :

L'équation d'état, qui présente l'évolution d'état d'un objet durant le temps et l'équation de mesure, qui relie les mesures à cet état.

Nous considérons un système dynamique linéaire et discret, l'équation d'état est donnée par :

$$x_{k+1} = F_k x_k + G_k u_k + w_k \quad \dots\dots\dots (1.1)$$

- x_k est le vecteur d'état qui incluse les quantités à estimer, comme la position, la vitesse et l'accélération.
- F_k est la matrice de transition. Elle décrit l'évolution dans le temps du vecteur d'état, en absence de l'entrée de contrôle et du bruit.
- u_k est l'entrée de contrôle ou le processus générateur, elle est supposée être connue.
- G_k est une matrice qui décrit comment l'entrée à l'instant k, contribue au vecteur d'état à l'instant k+1.
- w_k est le bruit de processus supposé indépendant, blanc et de moyenne nulle.

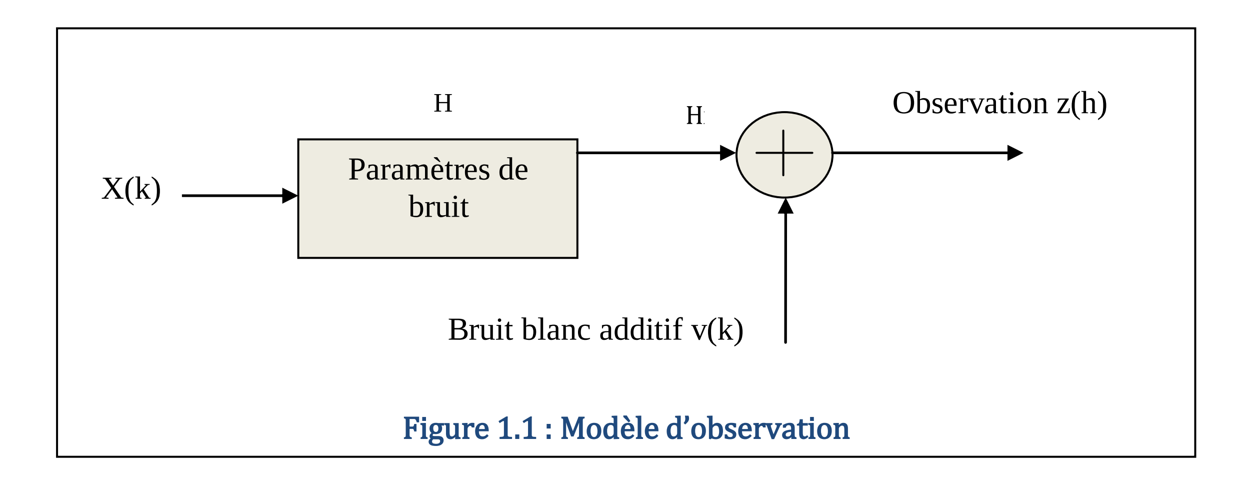


Figure 1.1 : Modèle d'observation

$$z_k = H_k x_k + v_k \quad \dots\dots\dots (1.2)$$

Où

- H_k est la matrice de mesure.
- v_k est le bruit de mesure supposé indépendant de w_k, blanc et de moyenne nulle.

$$E[w_k] = 0 \ldots \ldots (1.3)$$

$$E[v_k] = 0 \ldots \ldots (1.4)$$

$$E[v_k w_l^T] = 0; \quad \forall\, k, 1 \ldots \ldots (1.5)$$

$$E[w_k w_l^T] = Q_k \delta(k, 1) \ldots \ldots (1.6)$$

$$E[v_k v_l^T] = R_k \delta(k, 1) \ldots \ldots (1.7)$$

et

$$E[x_0 w_k^T] = 0 \quad \forall\, k \ldots \ldots (1.8)$$

$$E[x_0 v_k^T] = 0 \quad \forall k \ldots \ldots (1.9)$$

Q_k et R_k étant respectivement les matrices de covariance du bruit de processus et du bruit de mesure.

Le problème consiste à estimer le vecteur d'état $x_k$compte tenu des informations disponibles à l'instant n, postérieur, antérieur, ou identique à l'instant k.

On peut considérer les cas suivants: [2]

- k=n: il s'agit dans ce cas de déterminer une estimée de l'état, compte tenu de toutes les mesures disponibles à l'instant considéré n. c'est le cas du filtrage.
- k<n: en utilisant les mesures disponibles jusqu'à l'instant n, on essaye d'estimer l'état à un instant k antérieur à n. on fait alors un lissage ou une interpolation.
- k>n: il s'agit dans ce cas d'estimer la valeur du vecteur d'état à un instant k dans le futur. c'est ce qu'on appelle la prédiction ou l'extrapolation.

Nous noterons pour ces différents cas, l'estimée par: $\hat{x}_{k+1/n}$, c'est à dire l'estimée à l'instant k+1 compte tenu des informations disponibles à l'instant n.

L'estimée optimal au critère de l'erreur quadratique moyenne minimale est donnée par l'espérance mathématique conditionnelle notée comme suit: [5]

$$\hat{x}_{k+1/n} = E[x_{k+1}/z_l \ \ldots \ldots z_n] \ldots \ldots (1.10)$$

L'évolution du vecteur d'état estimée $\hat{x}_{k+1/n}$, est caractérisée par la matrice de transition F_k. En effet en substituant l'équation (1.1) dans (1.10), on obtient:

$$E[x_{k+1}/z_l \ \ldots \ldots z_k] = F_k E[x_k/z_l, \ldots, z_k] + G_k E(u_{k+1}/z_L, \ldots, z_k] + E[v_{k+1}/z_l, \ldots, z_k] \ldots \ldots (1.11)$$

Soit encore :

$$\hat{x}_{k+1/k} = F_k \, \hat{x}_{k/k} + G_k u_k \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1.12)$$

Étant donné que :

$$E\left[\frac{v_{k+1}}{z(l)}, \dots, z_k\right] = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1.13)$$

l'objectif est d'avoir une estimation récursive du vecteur d'état qui, à partir d'une estimation à l'instant k, nous fournisse une nouvelle estimation à l'instant k+1,en utilisant la mesure à cet instant. On adoptera une estimation linéaire de la forme:

$$\hat{x}_{k+1/k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1}\left[z_{k+1} - H_{k+1}\hat{x}_{k+1/k}\right] \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1.14)$$

La relation (1.14) exprime le fait que la nouvelle estimée du vecteur d'état à l'instant k+1, est une mise à jour de l'estimée à l'instant k. cette mise à jour tient compte de l'écart entre la mesure effective et la mesure prédite.

Nous devons donc déterminer le poids K_{k+1} à accorder à cette mise à jour de sorte que l'erreur au sens des moindres carrés, entre le vecteur d'état et son estimée, soit minimale. Le paramètre K_{k+1} est appelé gain du filtre de Kalman.

L'erreur d'estimation est définie par:

$$\tilde{x}_{k+1} = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k+1} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1.15)$$

Il s'agit donc de minimiser la quantité:

$$P_{k+1/k+1} = E\left[(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k+1})(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k+1})^T\right] = E\left[\tilde{x}_{k+1}\tilde{x}_{k+1}^T\right] \dots\dots\dots \quad (1.16)$$

$P_{k+1/k+1}$ est appelée matrice de covariance de l'erreur d'estimation. Le filtre de Kalman est donc un filtre à minimum de variance. C'est par abus de langage que l'on parle de minimiser cette quantité matricielle. Nous y reviendrons dans le prochain paragraphe.

2.2 Expression de la matrice de covariance : $P_{k+1/k+1}$ [5]

Nous allons, à partir des équations d'état et de la relation linéaire de l'estimation exprimer la matrice de covariance $P_{k+1/k+1}$ en fonction du gain K_{k+1}.

Reprenons les relations (1.1) et (1.12). .

$$x_{k+1} = F_k x_k + G_k u_k + w_k$$

$$\hat{x}_{k+1/k} = F_k\,\hat{x}_{k/k} + G_k u_k$$

En les soustrayant, il vient:

$$x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k} = F_k\left[x_k - \hat{x}_{k/k}\right] + w_k \quad \ldots \ldots \ldots (1.17)$$

D'après la relation (1.16) définissant $P_{k+1/k+1}$, on a:

$$P_{k+1/k} = E[(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k})(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k})^T] \quad \ldots \ldots \ldots (1.18)$$

D'ou, en prenant les espérances mathématiques des deux membres de l'équation (1.17)

$$P_{k+1/k} = F_k E[(x_k - \hat{x}_{k/k})(x_k - \hat{x}_{k/k})^T]F_k^T + E[(w_k w_k^T)] \quad \ldots \ldots \ldots (1.19)$$

Cette relation peut se simplifier en tenant compte de la relation (1.6) et du fait que:

$$E[(x_{k+1} - \hat{x}_{k/k})(x_{k+1} - \hat{x}_{k/k})^T] = P_{k/k} \quad \ldots \ldots \ldots (1.20)$$

Il vient alors:

$$P_{k+1/k} = F_k P_{k/k} F_k^T + Q_k \quad \ldots \ldots \ldots (1.21)$$

Nous devons à ce stade du calcul exprimer $P_{k+1/k+1}$ en fonction de $P_{k+1/k}$.
Pour ce faire, reprenons l'expression (1.15) de l'erreur $\tilde{x}_{k+1}$ et remplaçons l'estimée $\hat{x}_{k+1/k+1}$ par son expression donnée par la relation (1.14), on obtient:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1/k+1} &= x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k} - K_{k+1}\left[H_{k+1}x_{k+1} + v_{k+1} - H_{k+1}\hat{x}_{k+1/k}\right] \\ &= (I - K_{k+1}H_{k+1})\left(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k}\right) - K_{k+1}v_{k+1} \quad \ldots \ldots \ldots (1.22)\end{aligned}$$

Ou $\quad P_{k+1/k+1} = E\left[\tilde{x}_{k+1/k+1}\tilde{x}_{k+1/k+1}^T\right] \quad \ldots \ldots \ldots (1.23)$

Si on substitue l'expression (1.22) dans la relation (1.23), il vient en tenant compte de la relation que: $(AB)^T = B^T A^T$ que :

$$\begin{aligned}P_{k+1/k+1} &= (I - K_{k+1}H_{k+1})E[(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k})(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k})^T](I - K_{k+1}H_{k+1})^T \\ &+ K_{k+1}E[v_{k+1}v_{k+1}^T]K_{k+1}^T \quad \ldots \ldots \ldots (1.24)\end{aligned}$$

Soit encore:

$$P_{k+1/k+1} = (I - K_{k+1}H_{k+1})P_{k+1/k}(I - K_{k+1}H_{k+1})^T + K_{k+1}R_{k+1}K_{k+1}^T \quad \ldots \ldots \ldots (1.25)$$

$$P_{k+1/k+1} = P_{k+1/k} - K_{k+1}H_{k+1}P_{k+1/k} - P_{k+1/k}H_{k+1}^{T}K_{k+1}^{T} + K_{k+1}[H_{k+1}P_{k+1/k+1}H_{k+1}^{T} + R_{k+1}]K_{k+1}^{T} \dots \dots \dots \dots (1.26)$$

2.3 Expression du gain du filtre de Kalman: [5]

Nous devrons chercher l'expression du gain K_{k+1} qui minimise le critère

$$J = E[\tilde{x}_{k+1/k+1}^{T}\tilde{x}_{k+1/k+1}] \dots \dots (1.27)$$

Notons au passage que nous avons:

$$\text{Trace}\, P_{k+1/k+1} = E[\tilde{x}_{k+1/k+1}^{T}\tilde{x}_{k+1/k+1}] = J \dots \dots (1.28)$$

La relation (1.26) est une forme quadratique en K_{k+1}. Nous obtiendrons la valeur du gain optimal en résolvant l'équation suivante:

$$\frac{\partial J(k)}{\partial K(k)} = 0$$

L'optimisation de ce problème peut être faite de différentes manières. L'une de ces manières se base sur les formules du calcul différentiel des matrices. En utilisant les relations suivantes:

$$\frac{\partial(\text{Trace }(AB))}{\partial A} = B^{T} \qquad \text{(AB doit être carré)} \dots \dots (1.29)$$

$$\frac{\partial(\text{Trace}(ACA^{T}))}{\partial A} = 2AC \qquad \text{(C doit être symétrique)} \dots \dots (1.30)$$

On obtient

$$\frac{\partial(\text{Trace}\, P_{k+1/k+1})}{\partial K_{k+1}} = -2(H_{k+1}P_{k+1/k})^{T} + 2K_{k+1}(H_{k+1}P_{k+1/k}H_{k+1}^{T} + R_{k+1}) \dots \dots (1.31)$$

Soit encore :

$$-(I - K_{k+1}H_{k+1})P_{k+1/k}H_{k+1}^{T} + K_{k+1}R_{k+1} = 0 \dots \dots (1.32)$$

D’où

$$K_{k+1} = P_{k+1/k}H_{k+1}^{T}[H_{k+1}P_{k+1/k}H_{k+1}^{T} + R_{k+1}]^{-1} \dots \dots (1.33)$$

Et

$$P_{k+1/k+1} = P_{k+1/k} - P_{k+1/k}H_{k+1}^{T}H_{k+1}P_{k+1/k}H_{k+1}^{T} + R_{k+1}^{-1}H_{k+1}P_{k+1/k} \quad \dots\dots\dots (1.34)$$

Dans le cas continu, cette équation prend la forme d'une équation différentielle de Ricatti.

C'est pour cette raison, et par analogie que la relation (1.34) est appelée équation de Ricatti discrète.

Elle peut être réécrite sous la forme suivante:

$$P_{k+1/k+1} = P_{k+1/k} - K_{k+1}H_{k+1}P_{k+1/k} = [I - K_{k+1}H_{k+1}]P_{k+1/k} \dots\dots\dots (1.35)$$

La matrice $K_{k+1}H_{k+1}P_{k+1/k}$ est définie positive ou à la rigueur définie semi-positive.

Nous pouvons en outre écrire l'équation récursive de mise à jour de l'estimation comme suit:

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + K_k[\text{terme de correction}] \dots\dots\dots (1.36)$$

Il apparaît ainsi que:

1. Pour R_{k+1} constant, si P_{k+1} faible, le gain sera faible. Ainsi, on fera davantage confiance à l'estimation obtenue à partir du modèle. Si par contre P_{k+1} est élevé, ce qui traduit notre faible confiance dans le modèle K sera élevé et la contribution du terme de correction pondéré par le gain, sera plus forte. On se basera donc davantage sur les mesures pour la mise à jour.
2. Pour P_{k+1}constant, si R_{k+1} est faible, nous aurons des mesures faiblement bruitées. La valeur élevée du gain donnera plus de poids aux mesures. Si R_{k+1} est élevé,le gain sera faible et le poids du deuxième terme sera plus faible.

2.4 Initialisation du filtre de Kalman: [3]

Pour pouvoir utiliser l'ensemble des équations récurrentes constituant le filtre de Kalman, on doit choisir les conditions initiales: $\hat{x}_{0/0}$ et $P_{0/0}$.On peut prendre:

$$\hat{x}_{0/0} = E[x_0] \dots\dots\dots (1.37)$$

$$P_{0/0} = P_0 = E[x_0 - \hat{x}_{0/0})\left(x_0 - \hat{x}_{0/0}\right)^T] \dots\dots\dots (1.38)$$

Le choix des valeurs initiales est délicat. En effet, un mauvais choix de x_0, c'est à dire, à la limite une valeur arbitraire n'est pas catastrophique en ce sens que l'algorithme excité par les mesures apportera les corrections nécessaires. Par contre le traitement des mesures n'améliore pas la covariance de l'erreur au fur et à mesure de son traitement.

2.5 Notion d'innovation: [5]

Reprenons l'équation (1.14) de l'estimation récursive:

$$\hat{x}_{k+1/k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1}[z_{k+1} - H_{k+1}\hat{x}_{k+1/k}]$$

z_{k+1} représente la mesure effective et $H_{k+1}\hat{x}_{k+1/k}$ la prédiction de la mesure. Si cette prédiction est prédiction est parfaite, la correction apportée par la quantité

$$\tilde{z}_{k+1} = z_{k+1} - H_{k+1}\hat{x}_{k+1/k} \dots \dots (1.39)$$

sera nulle. On appelle $\tilde{z}_{k+1}$ l'innovation. On peut montrer que si le filtre est optimal, le processus $\tilde{z}_{k+1}$ est un bruit blanc de valeur moyenne nulle, c'est à dire qu'il ne contient plus d'informations pouvant enrichir la mise à jour de l'état.
Ainsi, en testant la « blancheur » de l'innovation on peut apprécier le degré d'optimalité et donc les performances du filtre.

3. Mise en œuvre du filtre de Kalman [2]

On peut résumer l'ensemble des équations récurrentes constituant le filtre de Kalman dans les étapes suivantes :

3.1 Prédiction:

1. A partir du vecteur d'état à l'instant antérieur, la prédiction du vecteur d'état est effectuée selon:

$$\hat{x}_{k+1/k} = F_k\, \hat{x}_{k/k} + G_k u_k \dots \dots (1.40)$$

2. Calcul de la matrice de covariance correspondant à l'état prédit:

$$P_{k+1/k} = F_k P_{k/k} F_k^T + Q_k \dots \dots (1.41)$$

3.2 Estimation:

1. Mise à jour du vecteur d'état:

$$\hat{x}_{k+1/k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1}\tilde{z}_{k+1} \dots \dots (1.42)$$

Ou $\tilde{z}_{k+1}$ est l'innovation définie en (1.39) et K_{k+1} est le gain de Kalman donnée par:

$$K_{k+1} = P_{k+1/k} H_{k+1} S_{k+1}^{-1} \dots \dots (1.43)$$

$S(k+1)$ est appelée matrice de covariance de l'innovation. Elle est donnée par:

$$S_{k+1} = H_{k+1} P_{k+1/k} H_{k+1}^T + R_{k+1} \dots \dots (1.44)$$

2. Mise à jour de la matrice de covariance de l'état estimé

la matrice de covariance correspondant à (1.42) est calculée selon:

$$P_{k+1/k+1} = P_{k+1/k} - K_{k+1}S_{k+1}K_{k+1}^{T} \quad \ldots (1.45)$$

On peut résumer l'algorithme de filtre de Kalman dans le cycle suivant en cinq étapes de base qui sont:

- Extrapoler la position et la vitesse de la cible.
- Extrapoler les erreurs d'estimation
- Calculer le gain du filtre.
- Mettre à jour l'estimation de vecteur d'état.
- Mettre à jour l'estimation pour les nouvelles données (mesure).

Le schéma de la figure 1.2 résume un cycle de calcul de l'état estimé d'un système linéaire par le filtre de Kalman.

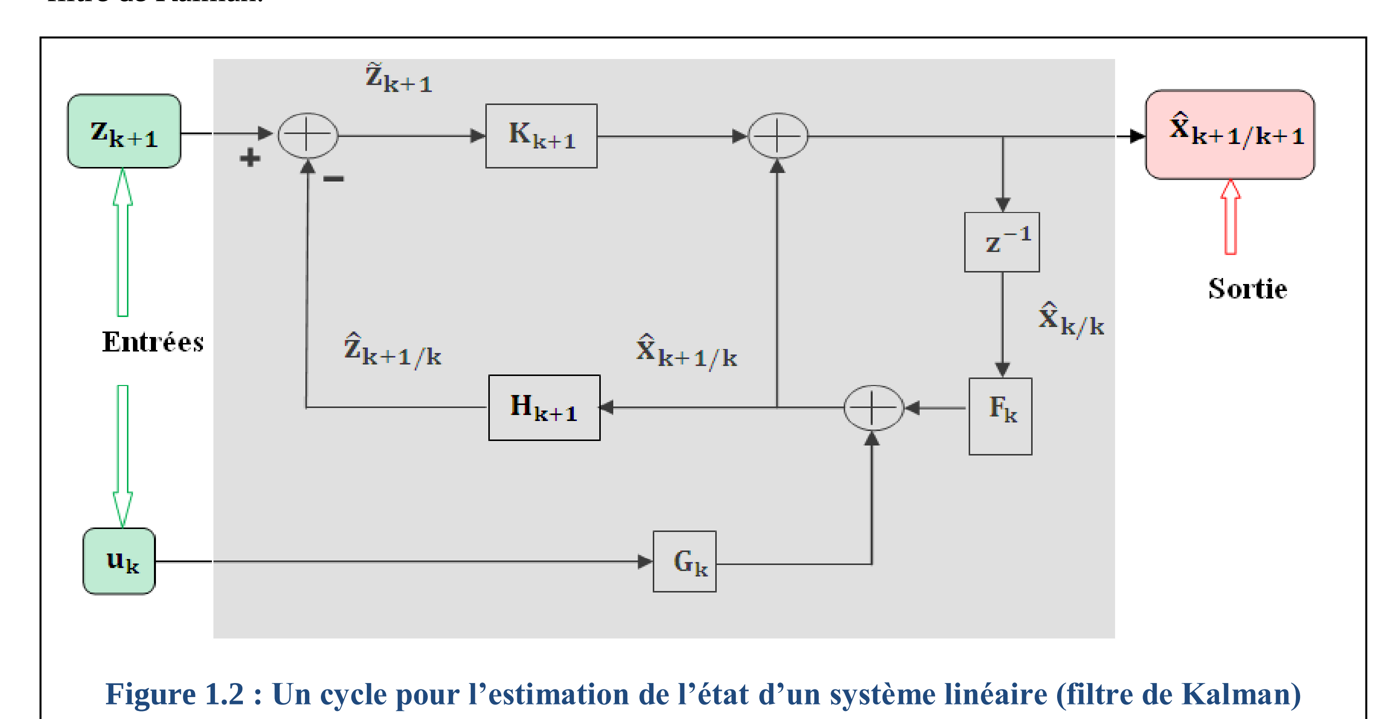


Figure 1.2 : Un cycle pour l'estimation de l'état d'un système linéaire (filtre de Kalman)

4. Les modèles cinématiques :

Les modèles d'état cinématiques sont définit par la mise de quelques dérivations de position à Zéro. Il existe deux modèles: modèle de deuxième ordre (white noise accélération) et le modèle de troisième ordre (Wiener process acceleration). [6]

4.1 Modèle à vitesse constante (deuxième ordre)

Ce modèle est plus adapté au mouvement d'une cible qui se déplace à une vitesse constante. Un objet déplace avec une vitesse constante, son mouvement est présenté par l'équation:

$$\ddot{x}_k = 0$$

La position évolue, en absence du bruit, selon un polynôme (dans ce cas de ordre), ce modèle est appelé le modèle polynomiale. En pratique, la vitesse subit des changements aléatoires, qui peuvent être modélisés par un bruit blanc d moyenne nulle.

Si on suppose que la poursuite se fait dans un plan (X,Y), le vecteur d'état relatif à la direction x sera formé de deux composantes qui sont la position et la vitesse dans cette direction:

$$x_k = [\hat{x}, \hat{\dot{x}}]^T \dots\dots (1.46)$$

L'équation d'état pour un filtre de Kalman du deuxième ordre est:

$$x_{k+1} = F_k x_k + G_k u_k \dots\dots (1.47)$$

La matrice de transition est donnée par:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots (1.48)$$

Où T présente le temps entre deux mesures, appelée aussi le temps de mise à jour.

Le terme $G_k u_k$ est introduit afin de prendre en considération les fluctuations de vitesse.
u_k est supposé être une valeur scalaire, blanche de moyenne nulle et de variance ${\sigma^2}_p$, qui représente l'accélération supposée constante durant la k^{eme} période d'échantillonnage. On a:

$$G = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix}^T \dots\dots (1.49)$$

$$E[u(k)u^T(l)] = {\sigma^2}_p \delta(k, 1) \dots\dots (1.50)$$

$$\text{et } Q(k) = K[Gu(k)u^T(l)G^T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}T^4 & \frac{1}{2}T^3 \\ \frac{1}{2}T^3 & T^2 \end{bmatrix} {\sigma^2}_p \dots\dots (1.51)$$

Il n'existe pas de règle pour le choix de σ_p . On peut cependant le choisir de façon empirique de l'ordre de grandeur de l'accélération maximal a_M :0.5 $a_M < \sigma_p < a_M$

4.2 Modèle à accélération constante (troisième ordre)

Ce modèle est approprié au mouvement d'une cible manoeuvrante. Il suppose que l'accélération est constante et utilise un bruit de processus pour modéliser ses fluctuations éventuelles. L'équation d'état correspondant à ce modèle est similaire à l'équation (1.47) .

Les composantes du vecteur d'état $x(k)$ sont dans ce cas: la vitesse et l'accélération.

$$x_k = [\hat{x}, \hat{\dot{x}}, \hat{\ddot{x}}]^T \dots\dots (1.52)$$

La matrice de transition F_k est donnée par:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & T & \frac{1}{2}T^2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

Les fluctuations de l'accélération sont modélisées par le bruit de processus $G(k)v(k)$, où v(k) représente l'incrément de l'accélération durant la k^{eme} période d'observation.

Il est supposé une séquence blanche de moyenne nulle avec une varianc $\sigma^2{}_v$ V avec:

$$G = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & T & 1 \end{bmatrix}^T \quad (1.54)$$

La matrice de covariance du bruit de processus est donnée par

$$Q(k) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}T^4 & \frac{1}{2}T^3 & \frac{T^2}{2} \\ \frac{1}{2}T^3 & T^2 & T \\ \frac{T^2}{2} & T & 1 \end{bmatrix} \sigma^2{}_v \quad (1.55)$$

Les changements de l'accélération sont de l'ordre de $\sigma^2{}_v$. Pour avoir un modèle proche du modèle à accélération constante il faut choisir une intensité de bruit σ_v petite de façon que les changement de l'accélération $\Delta\, a_M$ pendant une période restent petits par rapport à l'accélération actuelle.

En pratique en prendra: $0.5\, \Delta\, a_M < \sigma_p < \Delta\, a_M$.